



SEMESTRAL

UNI

academiacesarvallejo.edu.pe

— ACADEMIA —
CÉSAR
VALLEJO

— ACADEMIA —
CÉSAR
VALLEJO

— ACADEMIA —
CÉSAR
VALLEJO

— ACADEMIA —
CÉSAR
VALLEJO

SEMESTRAL
UNI



Álgebra

Tema: Sistemas de ecuaciones lineales

Docente: José Luis Vásquez Carhuamaca

academiacesarvallejo.edu.pe

SISTEMA DE ECUACIONES

Es un conjunto formado por dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas.

Ejemplo:

$$a) \begin{cases} x + y = 5 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases} \quad \text{Sistema lineal de orden 2}$$

su única solución es $(2; 3)$, por lo tanto, su conjunto solución es $C.S. = \{(2; 3)\}$

$$b) \begin{cases} xy + x + y = 29 \\ yz + y + z = 41 \\ xz + x + z = 34 \end{cases} \quad \text{Sistema no lineal}$$

$$C.S. = \{(4; 5; 6); (-6; -7; -8)\}$$

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

1) Por sustitución de incógnitas

- Resuelva el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + y = 7 & \dots (I) \\ 3x - 4y = 27 & \dots (II) \end{cases}$$

Resolución:

$$\text{De } 2x + y = 7 \rightarrow y = 7 - 2x$$

$$\begin{aligned} &\text{Reemplazando en} \\ &3x - 4y = 27 \\ &3x - 4(7 - 2x) = 27 \end{aligned}$$

$$\underline{3x} - 28 + \underline{8x} = 27$$

$$11x = 55$$

$$x = 5 \rightarrow y = -3$$

$$C.S. = \{(5; -3)\}$$

2) Por eliminación de incógnitas

Resuelva el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \quad \dots (I) \\ 2x - 3y = 12 \quad \dots (II) \end{cases}$$

Resolución:

3(I), 2(II)

$$9x + 6y = 15 \quad +$$

$$4x - 6y = 24$$

$$13x = 39$$

$$x = 3$$

Recm. en $3x + 2y = 5$

$$3(3) + 2y = 5$$

$$2y = -4$$

$$y = -2$$

$$\therefore C = \{ (3, -2) \}$$

3) Por matriz inversa

Resuelva el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 4x + 5y = 13 \quad \dots (I) \\ 2x + 3y = 7 \quad \dots (II) \end{cases}$$

Resolución:

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}}_I \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_I = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}}_{\det=2} \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \{ (2, 1) \}$$

4) Por la regla de Cramer

Resolvamos el sistema

$$\begin{cases} ax + by = c & \dots \text{(I)} \\ mx + ny = p & \dots \text{(II)} \end{cases}$$

para ello definamos:

$$\Delta_S = \begin{vmatrix} a & b \\ m & n \end{vmatrix} \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ p & n \end{vmatrix} \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ m & p \end{vmatrix}$$

Se cumple:

$$\rightarrow \Delta_S \cdot x = \Delta_x$$

$$\Delta_S \cdot y = \Delta_y$$

$$\text{Si } \Delta_S \neq 0: \quad x = \frac{\Delta_x}{\Delta_S} \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta_S}$$

Donde: Δ_S : Determinante del sistema Δ_x : Determinante con respecto a x Δ_y : Determinante con respecto a y

Aplicación:

Encuentre los valores de x e y del sistema

$$\begin{cases} ax + (a+1)y = a+1 \\ (a-1)x + ay = a-1 ; a > 1 \end{cases}$$

Resolución:

$$\Delta_S = \begin{vmatrix} a & a+1 \\ a-1 & a \end{vmatrix} = a^2 - (a-1)(a+1) = 1$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} a+1 & a+1 \\ a-1 & a \end{vmatrix} = a^2 + a - (a-1)(a+1) = a+1$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & a+1 \\ a-1 & a-1 \end{vmatrix} = a^2 - a - (a-1)(a+1) = -a+1$$

Luego

$$x = \frac{a+1}{1} ; y = \frac{-a+1}{1}$$

$$C = \{ (a+1; -a+1) \}$$

Sistema 3×3 Dado el sistema

$$(**) \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Resolución: Por la regla de Cramer, tenemos:

$$\text{Si } \Delta_S \neq 0: \quad x = \frac{\Delta_x}{\Delta_S}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta_S}; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta_S};$$

Donde

$$\Delta_S = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Aplicación:

Halle el valor de la incógnita x en:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \\ -x + 2y + z = 0 \\ -x + y + 3z = 2 \end{cases}$$

Resolución:

ANÁLISIS DEL SISTEMA DE ECUACIONES

Del sistema
$$\begin{cases} ax + by = c & \dots \text{(I)} \\ mx + ny = p & \dots \text{(II)} \end{cases}$$

se obtuvo: $\Delta_S \cdot x = \Delta_x \quad \wedge \quad \Delta_S \cdot y = \Delta_y$
entonces el sistema tendrá:

I) **solución única** (compatible determinado)

$$\Delta_S \neq 0$$

→

$$\frac{a}{m} \neq \frac{b}{n}$$

II) **infinitas soluciones** (compatible indeterminado)

$$\Delta_S = 0 \quad \wedge \quad (\Delta_x = \Delta_y = 0)$$

→

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p}$$

III) **ninguna soluciones** (incompatible)

$$\Delta_S = 0 \quad \wedge \quad (\Delta_x \neq 0 \vee \Delta_y \neq 0)$$

→

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} \neq \frac{c}{p}$$

Ejemplo:

a)
$$\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}$$

Como $\frac{3}{2} \neq \frac{4}{5} \rightarrow$ S. tiene única solución

b)
$$\begin{cases} 3x + 6y = 9 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$$

Como $\frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{9}{6} \rightarrow$ S. tiene infinitas soluciones

c)
$$\begin{cases} 4x + 6y = 8 \\ 6x + 9y = 10 \end{cases}$$

Como $\frac{4}{6} = \frac{6}{9} \neq \frac{8}{10} \rightarrow$ S. no tiene solución

ANÁLISIS DEL SISTEMA 3×3

Del sistema $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$

se obtuvo:

$$\Delta_S \cdot x = \Delta_x \quad \wedge \quad \Delta_S \cdot y = \Delta_y \quad \wedge \quad \Delta_S \cdot z = \Delta_z$$

entonces el sistema tendrá:

I) solución única

$$\Delta_S \neq 0$$

II) infinitas soluciones

$$\Delta_S = 0 \quad \wedge \quad (\Delta_x = 0 \quad \wedge \quad \Delta_y = 0 \quad \wedge \quad \Delta_z = 0)$$

III) ninguna solución

$$\Delta_S = 0 \quad \wedge \quad (\Delta_x \neq 0 \quad \vee \quad \Delta_y \neq 0 \quad \vee \quad \Delta_z \neq 0)$$

Aplicación:

Para que valores de K, el sistema es compatible determinado.

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + Ky + z = K \\ x + y + Kz = K^2 \end{cases}$$

Resolución:

SISTEMA LINEAL HOMOGÉNEO

Son aquellos sistemas lineales donde cada ecuación tiene término independiente nulo.

Ejemplos:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 5z = 0 \\ 3x - 4y + 6z = 0 \\ 4x + 6y - 7z = 0 \end{cases}$$

Una solución trivial o impropia es $(0; 0; 0)$.

Observación:

En un sistema homogéneo hay dos posibilidades:

1.- Tiene única solución $\leftrightarrow \Delta_S \neq 0$

La solución única es la solución trivial

2.- El sistema tiene infinitas soluciones $\leftrightarrow \Delta_S = 0$

Nota:

En un sistema homogéneo se cumple:

$$\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$$

Aplicación:

Resolver

$$\begin{cases} 2x + 7y + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ x + 8y + 2z = 0 \end{cases}$$

Resolución:

Luego

$$\Delta_S = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{r|rrr|rr} 2 & 7 & 1 & & & \\ -1 & 1 & 1 & & & \\ 1 & 8 & 2 & \rightarrow & 4 & \\ \hline & 2 & 7 & 1 & \rightarrow & -8 \\ & -1 & 1 & 1 & \rightarrow & 7 \\ \hline & 3 & & & & 3 \end{array}$$

$$\Delta_S = 0$$

$\therefore$ El sistema tiene infinitas soluciones

SISTEMA DE ECUACIONES NO LINEALES

Es un sistema de ecuaciones donde al menos una de las ecuaciones no es lineal.

Para resolver un sistema de ecuaciones no lineal no existe un procedimiento general. Nos podemos ayudar en algunos casos con el método de sustitución de incógnita, cambio de variable, productos notables, gráfica de funciones y relaciones entre otras..

Aplicación:

Resuelva el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x + y = 7 \\ x \cdot y = 12 \end{cases}$$

Resolución:

$$\text{De } xy = 12 \rightarrow y = \frac{12}{x}$$

Reemplazando en

$$3x + y = 7$$

$$3x + \frac{12}{x} = 7 \quad \text{por } (x)$$

$$3x^2 + 12 = 7x$$

- Resuelva el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y = 5xy & \div xy \\ y + z = 8yz & \div yz \\ z + x = 7zx & \div zx \end{cases}$$

Resolución:

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{x} = 5 \quad +$$

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{y} = 8$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = 7$$

$$2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 20$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 10$$

$$\rightarrow \frac{1}{z} = 5 \rightarrow z = \frac{1}{5}$$

Análogamente

$$\frac{1}{x} = 2 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{y} = 3 \rightarrow y = \frac{1}{3}$$

- Resuelva el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{10}{x+y} + \frac{3}{x-y} = 3 & \dots (I) \\ \frac{25}{x+y} - \frac{9}{x-y} = 2 & \dots (II) \end{cases}$$

Resolución:

3 I; II

$$\frac{30}{x+y} + \frac{9}{x-y} = 9 \quad +$$

$$\frac{25}{x+y} - \frac{9}{x-y} = 2$$

$$\frac{55}{x+y} = 11 \rightarrow x+y = 5$$

Reem en

$$\frac{10}{x+y} + \frac{3}{x-y} = 3$$

$$2 + \frac{3}{x-y} = 3$$

$$x-y = 3$$

Revolucionando

$$x+y = 5$$

$$x-y = 3$$

$$\rightarrow x = 4, y = 1$$

$$S = \{(4; 1)\}$$

— ACADEMIA —

CÉSAR

VALLEJO

GRACIAS

SÍGUENOS:   

academiacesarvallejo.edu.pe